19/12/16

3η Κατηγορία

Επιφάνειες Εφαπτομένων

Θεωρώ κανονική καμπύλη $c: J \to \mathbb{R}^3$, $t \in J$

Ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $x: J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$x(t,v) = c(t) + v c'(t)$$

Η x καλείται επιφάνεια εφαπτομένων της c.

Ελέγχω για κανονικότητα

$$x_t(t,v) = c'(t) + v c''(t)$$
$$x_v(t,v) = c'(t)$$

$$x_t \times x_v (t,v) = (c'(t) + v c''(t)) \times c'(t) = $$
$$= v c''(t) \times c'(t)$$

Η x δεν είναι κανονική στα σημεία $x(t,0) = c(t)$

$$\kappa(t) = \frac{\| c'(t) \times c''(t) \|}{\| c'(t) \|^3}$$

Συμπέρασμα

Η x είναι κανονική για $v \neq 0$ και αν $\kappa(t) > 0$

Το μοναδιαίο κάθετο είναι $N(t,v) = \dfrac{x_t \times x_v}{\| x_t \times x_v \|}(t,v)$

$$\Rightarrow N(t,v) = \pm \frac{c'(t) \times c''(t)}{\| c'(t) \times c''(t) \|} \Rightarrow$$

$N(t,v) = \pm \vec{b}(t)$ (δευτερεύον κάθετο)

Τα θεμελιώδη ποσά $2^{ας}$ τάξης είναι:

$$e = \langle x_{tt}, N \rangle = \langle c''(t) + v\, c'''(t), \pm \vec{b}(t) \rangle$$
$$= \dots$$

$$f = \langle x_{tv}, N \rangle = \langle c''(t), \pm \vec{b}(t) \rangle = 0$$

$$g = \langle x_{vv}, N \rangle = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

Δεν έχουν όλες οι επιφάνειες $K=0$

π.χ. Το μονόχωνο υπερβολοειδές έχει παντού $K<0$

Το μοναδιαίο κάθετο μένει σταθερό κατά γενέτειρα, αλλά αλλάξει γενέτειρα, αλλάζει.

<u>Ερώτηση</u>

Οι κυλινδρικές, κωνικές και επιφάνειες εφαπτομένων, έχουν καμπυλότητα Gauss $K=0$. Είναι οι μόνες επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K=0$?

<u>Απάντηση</u>

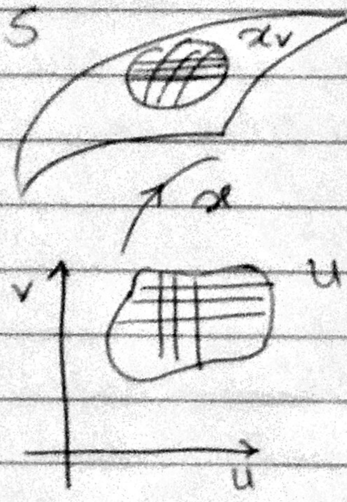
<u>Παρατήρηση</u>

Τα σημεία μιας επιφάνειας με $K=0$ είναι είτε παραβολικά είτε επίπεδα.

Υπόθεση

Έστω S επιφάνεια, της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά

Υποθέτω ότι $K_1 > 0$ και $K_2 = 0$



Σύμφωνα με το θεώρημα γύρω από κάθε σημείο υπάρχει σύστημα γραμμών καμπυλότητας $x: U \to S$

Άρα ότι x_u, x_v είναι κύριες διευθύνσεις χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι

$$\left.\begin{array}{ll} d x_u = k_1 x_u, & d x_v = 0 \\ d x_u = -N_u, & d x_v = -N_v \end{array}\right\} \Rightarrow N_v = 0$$

$N_v = 0 \Rightarrow N(u,v)$ ανεξάρτητο του u

Αυτό σημαίνει ότι το N παραμένει σταθερό κατά μήκος κάθε παραμ. καμπύλης $x(u=σταθ, v)$

Γνωρίζω ότι $f = 0$

$$f = \langle x_{uv}, N \rangle = -\langle x_u, N_v \rangle = -\langle x_v, N_u \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_v, N_u \rangle = 0} \qquad \left.\begin{array}{l} x_v \perp N \\ \Rightarrow x_v \perp N_u \end{array}\right\} (1)$$

N_u ; ανεξάρτητο του v

$\Rightarrow (1)$: $x_v \parallel N \times N_u$ = ανεξάρτητο του u, δηλαδή παραμένει σταθ. κατά μήκος των παραμετρικών καμπυλών

$x(u = σταθ, v)$

(Δεν έχω αυτό λύσει για αύριο)

Η $x(u=\sigma\tau\alpha\vartheta, v)$ έχει διάνυσμα εφαπτόμενο // προς σταθ. διάνυσμα $\neq 0$

άσκηση $\Rightarrow$ Η $x(u=\sigma\tau\alpha\vartheta, v)$ είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας)

Θεώρημα

Κάθε επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά (Προσοχή! Δεν ισχύει για $k_1=k_2$) είναι ευθειογενής.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα

Επιπλέον το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας παραμένει σταθερό κατά μήκος κάθε γεννήτορας.

Αναπτυκτές επιφάνειες

Ορισμός

Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ i) είναι ευθειογενής και ii) το εφαπτόμενο επίπεδο παραμένει σταθ. κατά μήκος κάθε γεννήτορας.

Θεώρημα

Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ χωρίς επίπεδα σημεία είναι αναπτυκτή.

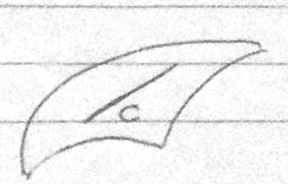
$\Updownarrow$ το ένα δεν είναι αντίστροφο του άλλου

Θεώρημα

Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια, έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$

Απόδειξη

Έστω $c(s)$ γεννήτορα της S με παράμετρο το μήκος τόξου s



Η $c(s)$ είναι ασυμπτωτική καμπύλη, δηλ. $k_n(\dot{c}(s)) = 0 \Leftrightarrow$

$$II_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0$$

Επειδή η S είναι αναπτυκτή έχω $(N\circ c)^{\cdot}(s) = 0$

Η τρίτη θεμελιώδης μορφή $III_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$$III_p(w) = \langle L_p w, L_p w \rangle \overset{L_p = -dN_p}{=} \langle dN_p(w), dN_p(w) \rangle$$

$$III_{c(s)}(\dot{c}(s)) = \langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), dN_{c(s)}(\dot{c}(s)) \rangle$$

$$= \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), (N\circ c)^{\cdot}(s) \rangle \Rightarrow III_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0$$

Έχω

$$III - 2H\,II + K\,I = 0$$

$$III_{c(s)}(\dot{c}(s)) - 2H(c(s))\, II_{c(s)}(\dot{c}(s)) + K(c(s))\, I_{c(s)}(\dot{c}(s)) = 0$$

$$\Rightarrow K(c(s)) = 0 \Rightarrow K = 0$$

Πόρισμα

Μια επιφάνεια με $K \neq 0$ δεν είναι αναπτυκτή.

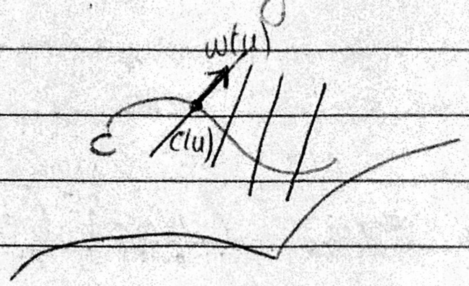
Παραδείγματα αναπτυκτών επιφανειών

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \text{Κυλινδρικές} \\ \cdot\ \text{Κωνικές} \\ \cdot\ \text{Εφαπτομενικές} \end{array}\right\} \text{επιφάνειες}$$

Ερώτημα

Είναι οι μόνες αναπτυκτές επιφάνειες?

Έστω S ευθειογενής επιφάνεια



$\{c'(u), w(u)\}$ γρ. ανεξ.

Θεωρώ καμπύλη $c: I \to S$ με παράμετρο u εγκάρσια στις γενέτειρες και διαφορίσιμη συνάρτηση $w: I \to \mathbb{R}^3$ με $\|w(u)\| = 1$

με $\|w(u)\| = 0$ και $w(u)$ να είναι // γενέτειρα που διέρχεται από το $c(u)$

$$x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$$

$$x: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

Είναι η x κανονική παραμετρική επιφάνεια?

$$x_u(u,v) = c'(u) + v\,w'(u)$$

$$x_v(u,v) = w(u)$$

$$x_u \times x_v (u,v) = \big(c'(u) + v\,w'(u)\big) \times w(u) = (1)$$

$$x_u \times x_v (u,0) = c'(u) \times w(u) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Η x τοπικά είναι κανονική

$$(1) = c'(u) \times w(u) + v\,w'(u) \times w(u)$$

$$N(u,v) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(u,v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(u,v) = \frac{c'(u) \times w(u) + v\,w'(u) \times w(u)}{\|c'(u) \times w(u) + v\,w'(u) \times w(u)\|}$$

Θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης

$$e = \langle x_{uu}, N \rangle$$

$$f = \langle x_{uv}, N \rangle = \left\langle c'(u), \frac{c'(u)\times w(u) + v\,w'(u)\times w(u)}{\|\ \dots\ \|} \right\rangle$$

μεικτό γινόμενο

$$f = \frac{u\langle c'(u), w'(u)\times w(u) \rangle}{\|\ \dots\ \|} = \frac{u\,[w', w, c']}{\|\ \dots\ \|}$$

$$g = \langle x_{vv}, N \rangle = 0$$

Αν η S είναι αναπτυκτή $\Rightarrow K=0 \Rightarrow$

$$\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = 0 \Rightarrow f=0$$

__Συμπέρασμα__

Αν $x(u,v) = c(u) + u\,w(u)$, $\|w(u)\| = 1$

$c'(u)\times w(u) \neq 0$ είναι αναπτυκτή

$\Rightarrow [w', w, c'] = 0$

__Εξετάζω το αντίστροφο του κριτηρίου με το μεικτό γινόμενο__

__Αντίστροφα__, έστω ότι $[w', w, c'] = 0 \Rightarrow w' \perp w\times c'$

$\langle w, w\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle w, w'\rangle = 0 \Rightarrow w' \perp w$

$$\Rightarrow w' \parallel (w\times c')\times w = \langle w, w\rangle c' - \langle w, c'\rangle w$$

$$w' = b\left(c' - \langle w, c'\rangle w\right)$$

$$N(u,v) = \frac{c'(u)\times w(u) + v b\left(c' - \langle w, c'\rangle w\right)\times w}{\|\ \dots\ \|}$$

$$= \frac{c'(u)\times w(u) + v b\, c'(u)\times w(u)}{\|\ \dots\ \|}$$

$$= \frac{(1+vb(u))\, c'(u)\times w(u)}{|1+vb(u)|\,\|c'(u)\times w(u)\|}$$

Πρόταση

Είναι η ευθειογενής επιφάνεια $x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$

όπου

$\|w(u)\| = 1$ και $c'(u) \times w'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$

Η x είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow [w(u),\ w'(u),\ c'(u)] = 0$